КАНТОР (Cantor) Георг (1845—1918) — немецкий математик, логик, теолог, создатель теории трансфинитных (бесконечных) множеств, оказавшей определяющее влияние на развитие математических наук на рубеже 19—20 вв. Окончил Университет Берлина (1867), профессор Университета Халле (1879—1913).

Главный труд: "Основы общего учения о многообразиях" (1902). Исследования К., инициированные необходимостью решения насущных проблем теории бесконечных рядов Фурье, стали основой для дальнейших фундаментальных исследований в направлении теории числовых множеств, где им были введены: общее определение множества, трансфинитные числа, общее понятие "мощность множества" (как количество элементов множества), мощности различных трансфинитных множеств. Под множеством К. понимал "...вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, т.е. всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона...".

Основополагающим в понятии множества является акт объединения различных объектов в единое целое, определяемое как множество. Элементами множеств могут быть любые объекты реальной дейсвительности, человеческой интуиции или интеллекта. Наличие в определении К. словосочетания "...совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона..." полностью определяет множество его элементами или законом (характеристическими признаками, свойствами), согласно которому происходит акт объединения различных объектов в единое целое — множество. Поэтому фундаментальным понятием теории множеств является не само понятие множества, а отношение принадлежности объектов множеству. К Аристотелю восходит традиция разделения бесконечности на актуальную и потенциальную: "Остается альтернатива, согласно которой бесконечное имеет потенциальное существование... Актуально бесконечное не существует" (Аристотель, "Физика").

Эта традиция продолжалась Декартом ("Бесконечность распознаваема, но не познаваема") и даже во времена К.Гаусса ("В математике бесконечную величину никогда нельзя использовать как нечто окончательное; бесконечность — не более чем facon de parle /манера выражаться — С.С./, означающая предел, к которому стремятся одни величины, когда другие бесконечно убывают"). К., как писал М.Клайн, отошел от давней традиции "уже тем, что рассматривал бесконечные множества как единые сущности, притом сущности, доступные человеческому разуму". Резко расходясь со своими коллегами-математиками во взглядах на математическую бесконечность, К. мотивировал необходимость введения актуально бесконечных множеств тем, что "потенциальная бесконечность в действительности зависит от логически предшествующей ей актуальной бесконечности". Классическим примером актуально бесконечного множества по К. являются десятичные разложения иррациональных чисел, т.к. каждый "конечный отрезок такого разложения дает лишь конечное приближение к иррациональному числу". К 1873 относится начало исследований К. по классификации актуально бесконечных множеств. Немного позднее К. определил бесконечное множество как множество, для которого существует взаимно однозначное соответствие с его собственным подмножеством (т.е. отличным от всего множества). Одним из следствий такого подхода стала, например, возможность установления взаимно однозначного соответствия между точками прямой линии и точками многообразия любой размерности. Основываясь на собственном определении бесконечных множеств, К. смог установить для каждой пары из них отношение эквивалентности (равномощности). В 1874 К. доказал несчетность множества всех действительных чисел, установив при этом существование пар бесконечных множеств, имеющих различные мощности (неэквивалентных множеств).

Систематически основы своей теории математической бесконечности К. изложил в 1879—1884. Основанием иерархии бесконечностей К. стала доказанная в первой половине 1890-х широко известная теорема К.-Бернштейна: "если два множества А и В таковы, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством А и подмножеством множества В и между множеством В и подмножеством множества А, то возможно установить также и взаимно однозначное соответствие между множеством А и множеством В", т.е. установить равномощность (эквивалентность) множеств

А и В. При этом, К. определял, что если множество А возможно поставить во взаимно однозначное соответствие с собственным подмножеством В, а множество В невозможно поставить во взаимно однозначное соответствие с собственным подмножеством А, то множество В по определению больше множества А. По мнению М.Клайна, такое определение обобщает на случай бесконечных множеств то, что "непосредственно очевидно в случае конечных множеств". Следуя данному подходу, К. доказал, что для любого "заданного множества всегда найдется множество, большее исходного" (например, множество всех подмножеств данного множества больше первоначального множества). То, что между двумя мощностями возможно установление отношений "равенство", "больше" и "меньше", дало К. основание назвать "числами" символы обозначения мощностей бесконечных множеств (для конечных множеств символы обозначения их мощности суть числа натурального ряда, определяющие количество элементов в каждом из эквивалентных конечных множеств).

В отличие от чисел натурального ряда [ординальных чисел /от нем. Die Ordinalzahl (Ordnungzahl) — числительные порядковые — С.С./, К. назвал кардинальными числами (от нем. Die Kardinalzahl — числительные количественные)] "числа" обозначения мощности бесконечных множеств. К. считал, что область определенных величин не исчерпывается конечными величинами, т.к. об "актуальном бесконечном также возможно доказательное знание". Если понятие мощности было расширенным понятием "количество" для бесконечных множеств, то понятие кардинального числа стало расширенным обобщением понятия "числа вообще". Расширение К. понятия "числа" в область

Бесконечного ознаменовало переход математики на качественно новый уровень мышления. Фактически, мощность множеств по К. отражает в сознании человека-исследователя определенные отношения множеств, т.е. мощность множеств по К. — это наиболее общая характеристика эквивалентных бесконечных множеств. Больцано еще в начале 19 в. пришел к понятию взаимно однозначного соответствия между множествами (а, следовательно, и к понятию мощностей множеств и выражению их кардинальными числами). Однако под "количеством" до середины 19 в. понималась величина. А так как каждую величину посредством избранной единицы измерения возможно выразить числом, то представление о количестве ассоциировалось с понятием числа. Поэтом Больцано был вынужден отступить перед серьезными затруднениями, вытекавшими из понятия "количество". Математика того времени вообще определялась как наука, исследующая зависимости между величинами и выражающими их числами.

Однако, как пишет В.А.Волков, "как бы ни были важны различные виды величин и зависимости между ними для практических приложений математики, они охватывают далеко не все богатства различных количественных отношений и пространственных форм действительного мира". К. также было введено в математику понятие "предельная точка производного множества", построен пример совершенного множества ("множество К."), сформулирована одна из аксиом непрерывности ("аксиома К.").

Следствия из теории К. выявили противоречия в достаточно серьезно изученных областях оснований математики. Эти противоречия лидеры математики того времени назвали парадоксами (антиномиями) по одной той причине, что парадокс "может быть объяснен, а математиков не покидала надежда, что все встретившиеся трудности им в конце концов удастся разрешить". Теорию математической бесконечности К., в отличие от большинства ведущих математиков того времени, поддерживали

Рассел и Гильберт. Рассел, считая К. одним из великих мыслителей 19 в., писал в 1910, что решение К. проблем, "издавна окутывающих тайной математическую бесконечность, является, вероятно, величайшим достижением, которым должен гордиться наш век /20 в. — С.С./". Гильберту в 1926 представлялось, что теория К. — это "самый восхитительный цветок математической мысли и одно из величайших достижений человеческой деятельности в сфере чистого мышления". А Э.Борель и А.Лебег уже в самом начале 20 в. обобщили понятие интеграла и развивали теории меры и измерений, в основании которых лежала теория К. К 1897 К. был вынужден прекратить активные математические исследования вследствие резкого сопротивления его идеям (в частности, со стороны Л.Кронекера, называвшего К. шарлатаном), выдвинув так называемый "закон сохранения невежества": "нелегко опровергнуть любое неверное заключение, коль скоро к нему пришли и оно получило достаточно широкое распространение, причем, чем менее оно понятно, тем более упорно его придерживаются". К. всегда разделял философские идеи Платона и верил в то, что в окружающем нас Мире "идеи существуют независимо от человека. И чтобы осознать реальность этих идей, необходимо лишь задуматься над ними". К., будучи в соответствии с давней религиозной традицией своей семьи ревностным лютеранином, в своих высказываниях часто применял и теологическую аргументацию. Особенно это проявилось после отхода его от занятий математикой.

С.В. Силков